

# ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ АБЕЛЯ О НЕРАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ

А. Скопенков

**Теорема Абеля.** *Калькулятор имеет кнопки*

$$1, \quad +, \quad -, \quad \times, \quad : \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{\phantom{x}} \quad \text{для любого } n.$$

*Он оперирует с комплексными числами и при нажатии кнопки  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  выдает все значения корня (и как-то их случайно нумерует). Калькулятор вычисляет числа с абсолютной точностью и имеет неограниченную память. При делении на 0 он выдает ошибку и прекращает работу.*

*Тогда ни при каком  $n \geq 5$  не существует программы для этого калькулятора, которая по коэффициентам многочлена  $n$ -й степени выдает конечное множество чисел, содержащее все его корни.*

Комментарии по поводу понятия программы и другая формулировка приведены в пункте 'путёвые перестановки для программы и коммутаторы'.

В этой заметке мы покажем, как можно было бы придумать простое доказательство теоремы Абеля. Мы следуем изложению [FT], которое упрощено по сравнению с [A] (не используется понятия римановой поверхности и гомотопии). В отличие от [FT], здесь излагается способ *придумать* доказательство.<sup>1</sup>

Для понимания самого доказательства достаточно прочитать определение путевой перестановки из следующего пункта, пункт 'план простого доказательства теоремы Абеля' и решения задач, на которые есть ссылки в этом пункте.

Заметим, что теорема (Галуа) о неразрешимости в радикалах *одного конкетного* уравнения [K, P, T] — более сильная.

Приводимое доказательство не используют терминов 'группа Галуа' и 'расширение поля'. Несмотря на отсутствие этих *терминов*, *идеи* приводимого доказательства являются *отправными* для теории Галуа (более подробно см. [Ch, KS, S]). Материал преподносится в виде задач, к которым даются указания. (И отсутствие терминов, и присутствие задач, характерно не только для дзенских монастырей, но и для серьезного изучения математики.) В конце приводятся задачи для исследования. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то это утверждение и надо доказать.

Благодарю М. Вялого, А. Канеля-Белова, Г. Челнокова и участников моих занятий за полезные обсуждения, а также М. Вялого за подготовку рисунков.

1. (а) Теорему Абеля достаточно доказать для уравнений 5-й степени.

(б) Теорему Абеля достаточно доказать для уравнений  $z^5 - z + a = 0$ .

(На самом деле, и необходимо, поскольку любое уравнение пятой степени сводится к написанному при помощи некоторой программы для нашего калькулятора.)

(с) (это не задача, а *загадка* [VINH]) Сформулируйте вещественный аналог теоремы Абеля. Вытекает ли он из комплексного? А комплексный из вещественного?

2. (а) У калькулятора оторвали кнопки  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ . Теперь не существует программы для решения квадратного уравнения.

(б)\* Не существует программы для решения кубического уравнения, использующей извлечение корня только один раз.

<sup>1</sup> Заметка основана на занятиях кружка 'Олимпиады и математика' и выездных школ команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду (<http://www.mccme.ru/circles/oim/mat.htm>). В одном месте (задача 7b, аналогично решаются задачи 8b и 9b) вместе с эвристическим рассуждением из [FT] приводится и более строгое (которое мне сообщил А. Канель со ссылкой на А. Ногина). В отличие от [FT], здесь используется понятие осторожного пути вместо рассуждений о перестановках башни значений радикальной формулы при обходе параметром замкнутого пути, не проходящего через особые точки радикальной формулы.

(с)\* Не существует программы для решения уравнения 4-й степени, использующей извлечение корня не более двух раз.

Вряд ли у вас получится решить задачу 2с без знания дальнейшего материала. К ней нужно возвращаться по мере его изучения.

### Путёвые перестановки.

В этом и следующих двух пунктах калькулятор не используется (поэтому даже читатель, у которого возникли вопросы о работе калькулятора, может смело решать задачи).

3. (а) Руководитель кружка двигался по единичной окружности на комплексной плоскости, сделал один оборот и вернулся в исходную точку. Он велел ученику двигаться на комплексной плоскости так, чтобы координата  $z$  ученика в любой момент равнялась бы квадрату координаты  $a$  руководителя. Как пришлось двигаться ученику?

(b) На следующее занятие кружка на комплексную плоскость пришло два ученика. Руководитель встал в точке 1, а учеников расставил в точки 1 и  $-1$ . Потом он велел каждому ученику двигаться так, чтобы координата  $a$  руководителя в любой момент равнялась бы квадрату координаты  $z$  ученика. А сам пошел по единичной окружности на комплексной плоскости против часовой стрелки, сделал один оборот и вернулся в исходную точку 1. Как пришлось двигаться ученикам? Где они оказались в конце занятия?

4. На следующее занятие кружка на комплексную плоскость пришло уже  $n$  учеников. Руководитель не растерялся, встал в точке 1, а учеников расставил в точки  $\cos(2\pi k/n) + i \sin(2\pi k/n)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Потом он сказал: ‘Моя координата равна  $n$ -й степени координаты любого из вас! Двигайтесь так, чтобы сохранить это замечательное свойство.’

(а) Руководитель сам пошел по единичной окружности на комплексной плоскости против часовой стрелки, сделал один оборот и вернулся в исходную точку 1. Как пришлось двигаться ученикам? Где они оказались в конце занятия?

(b) Руководитель называется *добрым*, если он не проходит через 0. Для любого замкнутого маршрута доброго руководителя в конце занятия ученики переставятся.

(с) Для произвольного замкнутого маршрута доброго руководителя если в конце ученик 1 оказался в точке  $\cos(2\pi k/n) + i \sin(2\pi k/n)$ , то ученик  $\cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$  оказался в точке  $\cos(2\pi(k+1)/n) + i \sin(2\pi(k+1)/n)$ .

(d) Для произвольного замкнутого маршрута доброго руководителя в конце занятия ученики переставятся по степени некоторого цикла.

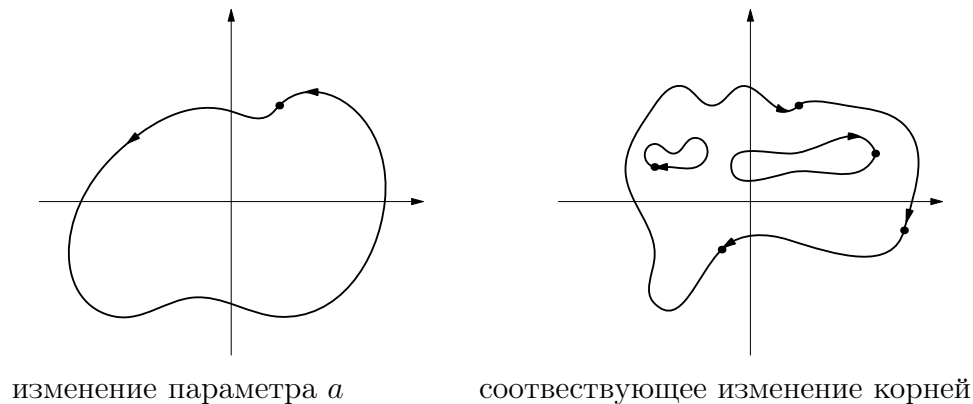


Рисунок 1

*Определение путевой перестановки.* Пусть  $p_a(z)$  — семейство многочленов степени  $n$ , коэффициенты которого (но не степень) непрерывно зависят от параметра  $a$ . Пусть уравнение  $p_{a_0}(z) = 0$  имеет  $n$  различных корней, которые обозначены  $z_1, \dots, z_n$ . Будем изменять параметр  $a$  (руководитель) вдоль некоторого непрерывного замкнутого пути с началом и концом в  $a_0$ . Пусть для любой точки  $a$  этого пути уравнение  $p_a(z) = 0$  имеет  $n$  различных корней. Будем двигать  $i$ -го ученика, начиная в  $z_i$ , и так, чтобы в каждый момент времени его координата была корнем уравнения. Тогда в конце движения ученики

переставятся.<sup>2</sup> Назовем полученную перестановку  $n$ -элементного множества **путёвой** для семейства уравнений  $p_a(z) = 0$  и данной нумерации корней уравнения  $p_{a_0}(z) = 0$ .

Это действительно перестановка, т.е. два ученика не могут в конце оказаться в одной точке (задача 4b). Цикл  $(12 \dots n)$  является путевой для  $p_a(z) = z^n - a$  и ‘естественной’ нумерации его корней (задача 4a); все путёвые перестановки являются степенями этого цикла (задача 4d).

5. (a) Тожественная перестановка путёвая для любого семейства многочленов и любой нумерации корней.

(b) Как перестановка, отвечающая вышеописанному замкнутому пути, зависит от начальной нумерации корней?

С этого места мы пропускаем слова ‘для некоторой нумерации корней’, говоря о путёвых перестановках.

### Ответы и указания.

4. (c) Если  $x(t)$  — закон движения первого ученика, то  $x(t)(\cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n))$  — закон движения второго.

(d) Следует из (c).

5. (a) Если параметр  $a$  в процессе движения стоит на месте, то каждый корень остается на месте.

(b) Ответ: при перенумерации, заданной перестановкой  $\alpha$ , перестановка  $\sigma$ , отвечающая вышеописанному замкнутому пути, перейдет в перестановку  $\alpha\sigma\alpha^{-1}$ .

### Зачем нужны путёвые перестановки?

Если бы удалось доказать, что любая путёвая перестановка для семейства уравнений, разрешимого в радикалах, циклическая, то для доказательства теоремы Абеля достаточно было бы привести пример семейства уравнений и нециклической путёвой для него перестановки. Однако перестановка  $(13)(24) = (1234)^2$  путёвая для  $p_a(z) = z^4 - a$ .

Хорошо было бы найти другое свойство путёвых перестановок для уравнений, разрешимых в радикалах, которое не выполняется для путёвых перестановок произвольных уравнений. Этого сделать не получится, ибо *любая перестановка является путёвой для некоторого семейства уравнений, разрешимого в радикалах, и некоторой нумерации корней*. (Действительно, если перестановка является произведением  $k$  циклов длин  $n_1, \dots, n_k$ , то искомое семейство уравнений —  $\prod_{s=1}^k ((z - n_s)^{n_s} - a)$ .)

И все-таки мы докажем теорему Абеля. Мы найдем свойство *множества* всех путёвых перестановок для уравнений, разрешимых в радикалах, не выполненное для *множества* всех путёвых перестановок произвольных уравнений.

Покажем отправную идею на примере решения задачи 2a. (Это решение сложнее придуманного вами ранее, но зато обобщается до доказательства теоремы Абеля.)

6. (a) Для каких  $a$  уравнение  $z^2 - 2z + a = 0$  имеет ровно два корня? (Здесь и далее имеются в виду комплексные корни.)

*Ответ.* Для  $a \neq 1$ .

(b) Как переставляются корни уравнения  $z^2 - 2z + a = 0$  при следующем изменении параметра  $a$ ?

Сначала от 0 до 0.99 по отрезку,

потом по окружности радиуса 0.01, обходящей вокруг точки 1 один раз

наконец, обратно от 0.99 до 0 по отрезку.

---

<sup>2</sup>Для первого знакомства с приводимыми идеями читателю полезно воспользоваться без доказательства существованием такого движения учеников (ср. задачи 4bcd), а также использовать аналогичные наглядные соображения при решении задач 7b, 8b и 9b ниже. Строгое обоснование вытекает из *комплексной теоремы о неявной функции*.

(с) Если  $q(a)$  является отношением многочленов от  $a$ , то только тождественная перестановка является путевой для  $p_a(z) = z - q(a)$  (здесь путь параметра  $a$  не проходит через нули числителя и знаменателя).

(d) Выведите из (b,с) решение задачи 2а.

### Ответы и указания.

Обозначим  $e^{it} := \cos t + i \sin t$ . (В настоящем тексте это нужно воспринимать именно как обозначение. Свойство  $e^{i(t_1+t_2)} = e^{it_1} e^{it_2}$  следует из формул для синуса и косинуса суммы.)

6. (b) Сначала корни приближаются к 1 с разных сторон. Чтобы корень двигался по закону  $z(t) = 1 + \varepsilon e^{it}$ , параметр  $a$  должен двигаться по закону  $a(t) = 2z(t) - z^2(t) = 1 - \varepsilon^2 e^{2it}$ . Поэтому возьмем  $\varepsilon = 0.1$ . Когда  $a$  совершит один оборот, каждый из корней совершит пол-оборота, т.е. они поменяются местами. Далее корни снова удалятся от 1.

Ответ: корни меняются местами.

### Путёвые перестановки для уравнений 3-й, 4-й и 5-й степени.

7. (a) Для каких  $a$  уравнение  $z^3 - 3z + a = 0$  имеет ровно три корня?

Указание. Проще всего решать эту задачу при помощи следующих фактов:

- любой многочлен степени  $n$  имеет ровно  $n$  комплексных корней, и
- любой кратный корень многочлена является также корнем его производной.

Ответ. Для  $a \neq \pm 2$ .

(b) Как переставляются корни уравнения  $z^3 - 3z + a = 0$  при следующем изменении параметра  $a$ ?

Сначала от 0 до  $2 - \delta_1$  по отрезку,

потом по кривой, 'обходящей вокруг точки 2 один раз',

наконец, обратно от  $2 - \delta_2$  до 0 по отрезку.

(В задачах 7bc, 8bc и 9bc выберите сами кривую и малые числа  $\delta_1, \delta_2$ , чтобы было удобно находить перестановку.)

(с) Как переставляются корни уравнения  $z^3 - 3z + a = 0$  при следующем изменении параметра  $a$ ?

Сначала от 0 до  $-2 - \delta_1$  по отрезку,

потом по кривой, 'обходящей вокруг точки  $-2$  один раз',

наконец, обратно от  $-2 - \delta_2$  до 0 по отрезку.

(d) Для  $p_a(z) = z^3 - 3z + a$  все перестановки путевые.

8. (a) Для каких  $a$  уравнение  $z^4 - 4z + a = 0$  имеет ровно четыре корня?

Ответ. Для  $a \neq 3, 3\alpha, 3\alpha^2$ , где  $\alpha = (1 + i\sqrt{3})/2$ .

(b) Как переставляются корни уравнения  $z^4 - 4z + a = 0$  при следующем изменении параметра  $a$ ?

Сначала от 0 до  $3 - \delta_1$  по отрезку,

потом по кривой, 'обходящей вокруг точки 3 один раз',

наконец, обратно от  $3 - \delta_2$  до 0 по отрезку.

(с) Как переставляются корни уравнения  $z^4 - 4z + a = 0$  при следующем изменении параметра  $a$ ?

Сначала от 0 до  $(3 - \delta_1)\alpha$  по отрезку,

потом по кривой, 'обходящей вокруг точки  $3\alpha$  один раз',

наконец, обратно от  $(3 - \delta_2)\alpha$  до 0 по отрезку.

(d) Для  $p_a(z) = z^4 - 4z + a$  все перестановки путевые.

9. (a) Для каких  $a$  уравнение  $z^5 - 5z + a = 0$  имеет ровно пять корней?

Ответ. Для  $a \neq 4, 4i, -4, -4i$ .

(b) Как переставляются корни уравнения  $z^5 - 5z + a = 0$  при следующем изменении параметра  $a$ ?

Сначала от 0 до  $4 - \delta_1$  по отрезку,

потом по кривой, 'обходящей вокруг точки 4 один раз',

наконец, обратно от  $4 - \delta_2$  до 0 по отрезку.

(с) Как переставляются корни уравнения  $z^5 - 5z + a = 0$  при следующем изменении параметра  $a$ ?

Сначала от 0 до  $(4 - \delta_1)i$  по отрезку,

потом по кривой, 'обходящей вокруг точки  $4i$  один раз',

наконец, обратно от  $(4 - \delta_2)i$  до 0 по отрезку.

(d) Для  $p_a(z) = z^5 - 5z + a$  все перестановки путевые.

**10.** Найдите все путёвые перестановки для

(a)  $p_a(z) = z^4 + 2(1 - 2a)z^2 + 1$ . (b)  $p_a(z) = (z^3 - a)^3 - a(a - 1)$ .

**Ответы и указания.**

**7.** (b) Ответ: корни  $0, \sqrt{3}$  поменяются местами, корень  $-\sqrt{3}$  остается на месте.

Зададим движение корня 0, по нему восстановим движение параметра  $a$ , а затем движение остальных корней. См. рис. 2.

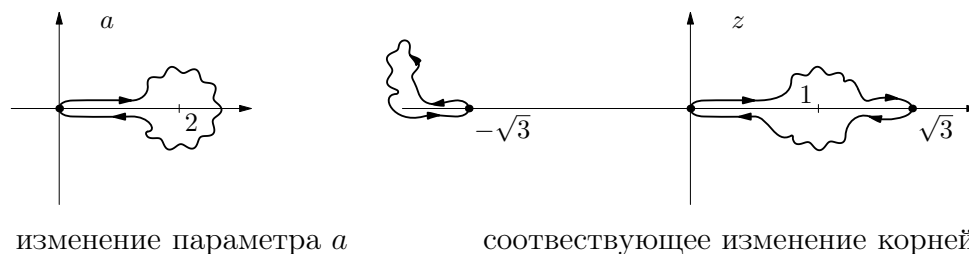


Рисунок 2

Сначала первый корень  $z = 0$  приближается к 1 слева и превращается в  $1 - \delta_1$ . При этом  $a = 3z - z^3$  приближается к 2 слева. Значит, второй корень  $\sqrt{3}$  приближается к 1 справа и превращается в  $1 + \delta_2$ . А третий корень  $-\sqrt{3}$  остается отрицательным. См. рис. 3.

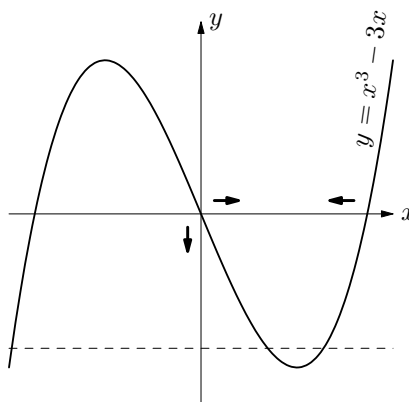


Рисунок 3

Затем пусть первый корень идет в  $1 + \delta_2$  по некоторой кривой, близкой к 1 и не пересекающей вещественной оси нигде, кроме своих концов. Тогда второй корень остается близким к 1, а третий корень остается отрицательным. Значит, корень второй корень придет в  $1 - \delta_1$ .<sup>3</sup>

Далее первый корень приближается к  $\sqrt{3}$  слева, примерно повторяя начальную часть движения второго корня в противоположном направлении. Значит, второй корень приближается к 0 справа, примерно повторяя начальную часть движения первого корня в противоположном направлении. А третий корень остается отрицательным.

<sup>3</sup>Вот неформальная иллюстрация этого движения. Пусть первый корень движется по закону  $z(t) = 1 + \delta_1 e^{it}$ . Тогда параметр  $a$  движется по закону  $a(t) = 3z(t) - z^3(t) = 2 - 3\delta_1^2 e^{2it} - \delta_1^3 e^{3it}$ . Так как  $\delta_1$  мало, эта кривая близка к окружности  $2 - 3\delta_1^2 e^{2it}$ . А значит, второй корень придет примерно в точку  $1 - \delta_1$  (ибо третий корень остается далеко).

(с) Указание. Используйте нечетность.

Ответ: корни  $0, -\sqrt{3}$  поменяются местами, корень  $\sqrt{3}$  остается на месте.

(d) Докажите, что любая перестановка 3-элементного множества представляется в виде композиции транспозиций (12) и (13).

8. (b) Аналогично задаче 7b корни  $0, \sqrt[3]{4}$  поменяются местами. Остальные два корня в процессе движения не пересекают ось  $Ox$  и поэтому в конце движения будут на своих прежних местах.

Ответ: корни  $0, \sqrt[3]{4}$  поменяются местами, остальные два корня остаются на месте.

(с)  $p_{\alpha\alpha}(\alpha z) = \alpha p_{\alpha}(z)$ .

Ответ: корни  $0, \sqrt[3]{4}\alpha$  поменяются местами, остальные два корня остаются на месте.

(d) Докажите, что любая перестановка 4-элементного множества представляется в виде композиции транспозиций (12), (13) и (14).

9. (b) Аналогично задачам 7b и 8b. Корни  $0, \sqrt[4]{5}$  поменяются местами, а остальные три корня вернутся на свои прежние места. (Ибо корни  $i\sqrt[4]{5}$  и  $-i\sqrt[4]{5}$  в процессе движения не пересекают вещественной оси, а корень  $-\sqrt[4]{5}$  остается вещественным отрицательным.)

(d) Докажите, что любая перестановка 5-элементного множества представляется в виде композиции транспозиций (12), (13), (14) и (15). Для этого докажите, что

- любая перестановка 5-элементного множества является композицией циклов,
- любой цикл является композицией транспозиций,
- любая транспозиция является композицией транспозиций (12), (13), (14) и (15).

### Осторожные пути.

11. (a) Пусть  $q(a)$  — отношение многочленов от  $a$ . Докажите, что все путевые перестановки для  $p_a(z) = z^n - q(a)$  являются степенью некоторого одного цикла.

(b)\* Пусть существует программа для решения уравнения  $p_a(z) = 0$ , использующая извлечение корня только один раз. Обязательно ли все путевые перестановки являются степенью некоторого одного цикла?

Наш калькулятор имеет неприятную особенность: результат вычислений не всегда однозначно определяется вводимыми данными (например, программа, выдающая *первое* значение  $\sqrt{1}$ , будет случайно выдавать 1 или  $-1$ ). Эту неприятность можно преодолеть, осознав, что теорему Абеля достаточно доказать для ‘симметричных’ программ для нашего калькулятора (или, эквивалентно, для похожего калькулятора, оперирующего с *множествами* комплексных чисел). Но все равно будет непросто дать определение путевой перестановки *для программы*, которое необходимо для решения задачи 11b. Мы поступим по-другому.

*Радикальной формулой относительно  $a_0, \dots, a_n$*  называется (упорядоченный) набор рациональных функций (т.е. отношений многочленов)  $p_1, \dots, p_s$  от  $n+1, \dots, n+s$  переменных, соответственно, и целых положительных чисел  $k_1, \dots, k_s$ . Для радикальной формулы определим выражения

$$z_1, \dots, z_s \text{ формулой } z_j^{k_j} = p_j(a_0, \dots, a_n, z_1, \dots, z_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Уравнение  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$  с комплексными переменными коэффициентами называется *разрешимым в радикалах*, если существует радикальная формула относительно  $a_0, \dots, a_n$ , для которой любой корень уравнения является одним из значений одного из выражений  $z_1, \dots, z_s$ . Ср. [FT, Chapter 5].

Мы докажем теорему Абеля в следующей эквивалентной форме: *ни при каком  $n \geq 5$  уравнение  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$  с комплексными переменными коэффициентами не является разрешимым в радикалах.*

Для доказательства теоремы Абеля полезно следующее понятие. Назовем замкнутый путь на плоскости **осторожным** для данной радикальной формулы, в которой  $a_0, \dots, a_n$

зависят от параметра  $a$ , если при изменении параметра  $a$  вдоль этого пути каждое значение каждого выражения  $z_s$  возвращается на место.

**12.** (а) Если путь является осторожным относительно каждой из двух радикальных формул  $p_1, \dots, p_s; k_1, \dots, k_s$  и  $q_1, \dots, q_t; l_1, \dots, l_t$ , то он является осторожным относительно их *суммы*

$$p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_t, p_s + q_t; k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_t, 1.$$

(b) Определите разность, произведение и частное радикальных формул. Докажите для них аналог предыдущего пункта.

(c)  $n$ -й степенью замкнутого пути называется новый замкнутый путь, который получается прохождением исходного пути  $n$  раз. Если путь является осторожным относительно радикальной формулы  $p_1, \dots, p_s; k_1, \dots, k_s$ , то его  $n$ -я степень является осторожной относительно радикальной формулы  $p_1, \dots, p_s, z_s; k_1, \dots, k_s, n$ .

(d)  $k_1 \cdot \dots \cdot k_s$ -я степень любого пути является осторожной относительно радикальной формулы  $p_1, \dots, p_s; k_1, \dots, k_s$ .

(e) Если семейство уравнений  $p_a(z) = 0$  разрешимо при помощи радикальной формулы  $p_1, \dots, p_s; k_1, \dots, k_s$ , то  $k_1 \cdot \dots \cdot k_s$ -я степень любой путевой перестановки тождественна.

Последним утверждением нельзя воспользоваться для доказательства теоремы Абеля, ибо любая перестановка в некоторой степени равна тождественной.

*Коммутатором* двух замкнутых путей называется новый замкнутый путь, который получается последовательным прохождением

первого пути,

второго пути,

первого пути в обратную сторону,

второго пути в обратную сторону.

**13.** (а) Если оба пути — осторожные относительно радикальной формулы  $p_1, \dots, p_s; k_1, \dots, k_s$ , то их коммутатор — осторожный относительно радикальной формулы  $p_1, \dots, p_s, z_s; k_1, \dots, k_s, n$ .

(b) Если существует программа для решения уравнения  $p_a(z) = 0$ , использующая одноэтажные извлечения корней, то любые две путевые перестановки коммутируют (т.е.  $\sigma\tau = \tau\sigma$ ).

(c) Не существует программы для решения кубического уравнения, использующей одноэтажные извлечения корней. (Сравните с задачей 2b и вашим решением ее.)

**14.** (а) Какое условие на множество путевых перестановок следует из существования программы для решения уравнения  $p_a(z) = 0$ , использующей не более, чем двухэтажное извлечение корня?

(b) Выведите из вашего решения пункта (а) и задачи 8d решение задачи 2c.

**15.** (а) Какое условие на множество путевых перестановок следует из существования программы для решения уравнения  $p_a(z) = 0$ , использующей не более, чем трехэтажное извлечение корня?

(b) Существуют две не коммутирующие перестановки 5-элементного множества, каждая из которых является коммутатором некоторых двух произведений коммутаторов.

(c) Выведите из (а,b) и задачи 9 необходимость наличия хотя бы трех этажей в программе, якобы решающей семейство уравнений  $z^5 - z + a = 0$ .

(d) Докажите теорему Абеля.

### Ответы и указания.

**11.** (а) Аналогично задачам 4cd.

**13.** (а) Значение выражения  $z_s$  возвращается на место в результате обхода числом  $a$  каждого из двух данных замкнутых путей  $L_1$  и  $L_2$ . Поэтому  $n$  значений выражения  $z_{s+1}$  имеют вид  $x, x\varepsilon, x\varepsilon^2, x\varepsilon^3, \dots, x\varepsilon^{n-1}$  для некоторого  $x$  и  $\varepsilon := \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ .

Аналогично задаче 4d для любого замкнутого пути  $L$  найдется такое  $k(L)$ , что в результате изменения параметра  $a$  вдоль этого пути число  $x\varepsilon^s$  переходит в число  $x\varepsilon^{s+k(L)}$ . Поэтому в результате прохождения параметром  $a$  коммутатора путей  $L_1$  и  $L_2$  число  $x\varepsilon^s$  переходит в число  $x\varepsilon^{s+k(L_1)+k(L_2)-k(L_1)-k(L_2)}$ .

(b) Следует из (a).

**14. (a) Подсказка.** Условие  $\sigma\tau = \tau\sigma$  (на перестановки) равносильно тождественности перестановки  $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ . Эта перестановка называется *коммутатором* перестановок  $\sigma, \tau$ . Если имеется двухэтажная формула, то для путёвых перестановок  $\sigma, \tau$  коммутатор (т.е. перестановка  $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ ) может не быть тождественной. Однако для коммутаторов выполняется некоторое условие. Найдите его!

*Ответ.* Если существует программа для решения уравнения  $p_a(z) = 0$ , использующая не более, чем двухэтажное извлечение корня, то коммутаторы путёвых перестановок коммутируют. (Даже произведения коммутаторов путёвых перестановок коммутируют.)

*Доказательство* аналогично решению задачи 13a.

**15. (a)** Если существует программа для решения уравнения  $p_a(z) = 0$ , использующая не более, чем трехэтажное извлечение корня, то коммутаторы коммутаторов путёвых перестановок коммутируют. (Даже произведения коммутаторов произведений коммутаторов путёвых перестановок коммутируют.) Доказательство аналогично задачам 13ab и 14a.

(b) Пример можно придумать напрямую или доказав, что любая четная перестановка является произведением коммутаторов. (Определение четной перестановки напомним ниже.)

### План простого доказательства теоремы Абеля.

Мы довольно долго *придумывали* доказательство теоремы Абеля. *Изложить* же доказательство можно совсем коротко. (Освобождение доказательства от деталей, возникших при его придумывании и не нужных для него самого — важная часть его проверки.) Приведем план такого изложения.

Теорема Абеля вытекает из следующих трех лемм. Для их формулировки введем следующее определение (которое поможет нам коротко произносить громоздкие конструкции, возникшие в задачах 13b, 14a и 15a). Для данного семейства уравнений  $p_a(z) = 0$  назовем *0-путёвыми* путёвые перестановки. Если уже определены  $n$ -путёвые перестановки, то назовем перестановку  $(n+1)$ -*путёвой*, если она представляется в виде композиции коммутаторов некоторых  $n$ -путёвых перестановок.

**Лемма о коммутаторах.** *Если существует программа для решения семейства уравнений  $p_a(z) = 0$ , использующая не более, чем  $n$ -кратное извлечение корня, то лишь тождественная перестановка является  $n$ -путёвой для этого семейства.*

**Лемма о примере уравнения.** *Существует такое семейство  $p_a(z)$  уравнений 5-й степени, множество всех путёвых перестановок которого совпадает с множеством всех перестановок 5-элементного множества.*

**Лемма о четных перестановках.** *Любая четная перестановка 5-элементного множества является произведением коммутаторов четных перестановок.*

Напомним, что перестановка называется *четной*, если она представляется в виде произведения циклов длины 3. (Это определение равносильно общепринятому.)

Лемма о коммутаторах следует из задачи 13a (аналогично задачам 13b, 14a, 15a). Лемма о примере уравнения следует из задачи 9d. Доказательство леммы о четных перестановках — задача (указание: достаточно доказать, что таковым является цикл длины 3).

### Задачи для исследования.

В математике имеется много результатов, непосредственно связанных с теоремой Абеля. См., например, [Kh], [PS].



Следующие задачи показывают, что метод Феррари для решения уравнения 4-й степени ‘самый простой’, а формула дель Ферро-Кардано-Тартальи в виде

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{-a + \sqrt{a^2 - 4}} - \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 4}})$$

для решения кубического уравнения  $x^3 - 3x + a = 0$  — не ‘самая простая’.

**16.** Существует программа для калькулятора, строящая по числу  $a$  конечное множество, содержащее все корни уравнения  $x^3 - 3x + a = 0$ , и содержащая только одно извлечения корня из выражения, содержащего корни.

**17.** Не существует

(а) формулы вида  $z = \sqrt[k]{p + \sqrt[l]{q + \sqrt[n]{r}}} + \sqrt[n]{s + \sqrt[t]{t}}$  для решения уравнения  $x^4 - 4x + a = 0$  ни для каких целых положительных  $k, l, m, n, o$  и рациональных функций  $p, q, r, s, t$  от  $a$ .

(б) программы, строящей по числу  $a$  конечное множество, содержащее все корни уравнения  $x^4 - 4x + a = 0$ , и содержащей только одно ‘трехэтажное’ извлечения корня.

**18.** Существует ли программа для *вещественного* аналога калькулятора, определенного в начале заметки, находящая все *вещественные* корни

(а) уравнения  $x^3 + px + q = 0$  по его коэффициентам  $p, q$ ?

(б) уравнения  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$  по его коэффициентам  $p, q, r$ ?

(с) уравнения  $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$  по его коэффициентам  $p, q, r, s$ ?

**19.** Добавим к калькулятору кнопку, выдающую по числу  $\cos \alpha$  все значения числа  $\cos(\alpha/5)$ . Появится ли программа для решения уравнения 5-й степени?

Задачи 16 и 17 несложны. (Задачу 16 можно решить, не используя изложенных выше идей, а задачу 17 — вряд ли.) К сожалению, автору не удалось найти в литературе ответы на естественные вопросы задач 18 и 19 (хотя, видимо, ответы известны специалистам).

### Ответы и указания.

**16.**  $b := \frac{1}{2}\sqrt[3]{-a + \sqrt{a^2 - 4}}$  и  $x := b - \frac{1}{b}$ .

**17.** Если бы такая формула/программа существовала, то все коммутаторы произведений коммутаторов (перестановок 4-элементного множества) были бы степенью некоторой одной нестареповки. А это не так.

### Литература.

- [A] В.Б. Алексеев, Теорема Абеля. М: Наука, 1976.
- [Ch] Г.Р. Челноков, Основы теории Галуа в интересных задачах, <http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/grishalois.pdf>. (засмотрено 11.11.2010)
- [FT] D. Fuchs, S. Tabachnikov, Mathematical Omnibus. AMS, 2007.
- [K] В.А. Колосов, Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. М: Гелиос, 2001.
- [Kh] А.Г. Хованский, Топологическая теория Галуа, Москва, МЦНМО, 200?
- [KS] П. Козлов и А. Скопенков, В поисках утраченной алгебры: в направлении Гаусса (подборка задач), Мат. Просвещение, 12 (2008), 127–144, <http://arxiv.org/abs/0804.4357>
- [P] В.В. Прасолов, Многочлены, М: МЦНМО, 2003. <http://www.mccme.ru/prasolov>
- [PS] В.В. Прасолов и Ю.П. Соловьев, Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М.: Факториал, 1997. <http://www.mccme.ru/prasolov>
- [S] А. Скопенков, Философски-методическое отступление, в кн. Сборник материалов московских выездных математических школ. Под редакцией А. Заславского, Д. Пермякова, А. Скопенкова, М. Скопенкова и А. Шаповалова, Москва, МЦНМО, 2009. <http://www.mccme.ru/circles/oim/mvz.pdf> (засмотрено 20.08.2010)
- [T] В.М. Тихомиров, Абель и его великая теорема, Квант, 2003, N1.
- [VINH] Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. Элементарная топология, М: МЦНМО, 2010.